Probability and Random Processes

EES 315

Asst. Prof. Dr. Prapun Suksompong

prapun@siit.tu.ac.th

9 Expectation and Variance

Office Hours:

Check Google Calendar on the course website.

Dr.Prapun's Office:

6th floor of Sirindhralai building, BKD

Expectation and Variance

- The **expectation** (or **mean** or **expected value**) of a discrete random variable X is given by

$$\mathbb{E}X = \sum_x x p_X(x)$$

- The expected value of a function g of a RV X is given by

$$\mathbb{E}\left[g(X)\right] = \sum_x g(x) p_X(x)$$

- The **variance** of a RV X is given by

$$\mathrm{Var}[X] = \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}X)^2\right] = \mathbb{E}\left[X^2\right] - (\mathbb{E}X)^2$$

- The **standard deviation** of a RV X is given by

$$\sigma_X = \sqrt{\mathrm{Var}[X]}$$

Expectation

- The **expectation** (or **mean** or **expected value**) of a discrete random variable X is given by

$$\mathbb{E}X = \sum_x x p_X(x)$$

Example

$$\mathcal{S}_X = \{1,2,3,4\}$$

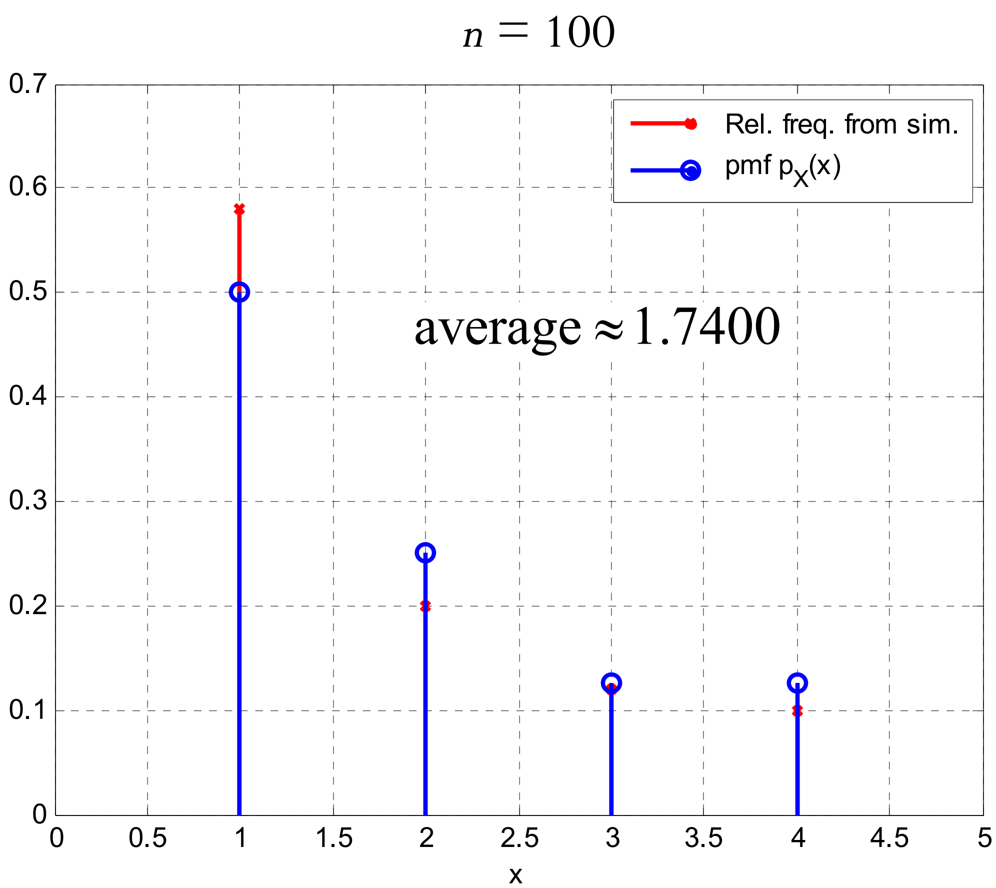
$$p_X(x) = \begin{cases} 1/2, & x = 1, \\ 1/4, & x = 2, \\ 1/8, & x \in \{3,4\} \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

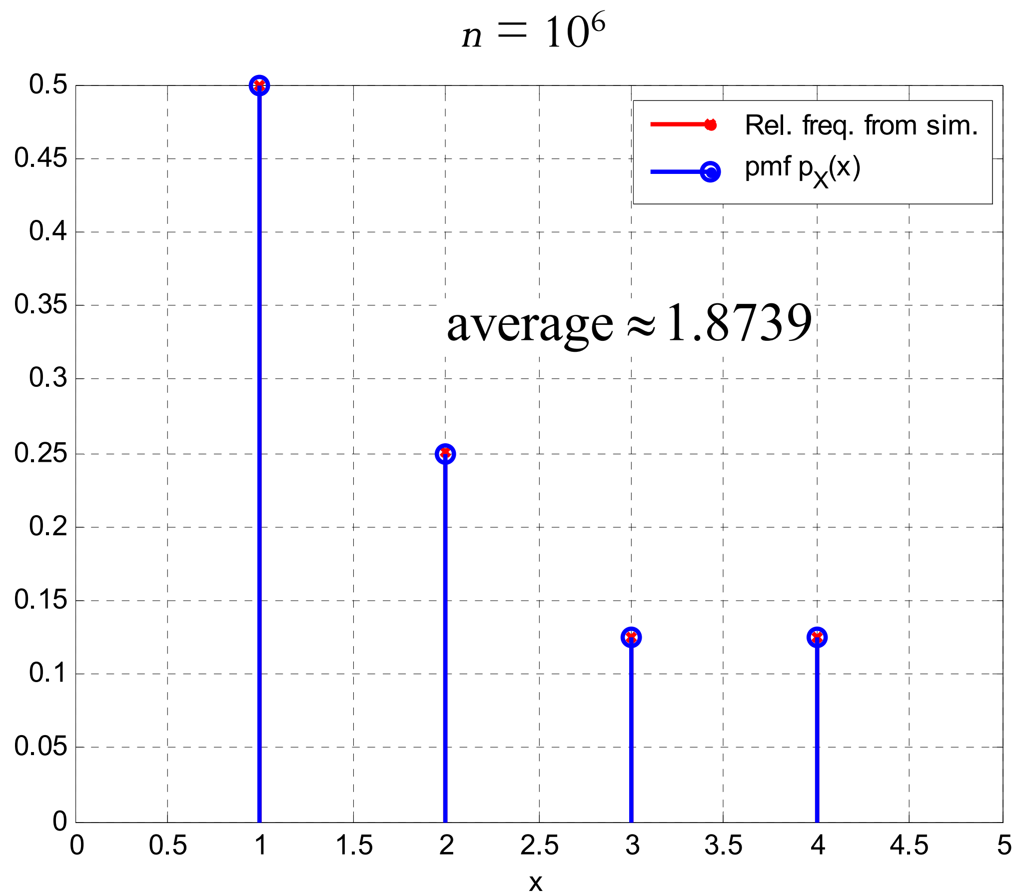
2	1	1	2	1	4	1	1	1	1
1	1	4	1	1	2	4	2	2	1
3	1	1	2	3	2	4	1	2	4
2	1	1	2	1	1	3	3	1	1
1	3	4	1	4	1	1	2	4	1
4	1	4	1	2	2	1	4	2	1
4	1	1	1	1	2	1	4	2	4
2	1	1	1	2	1	2	1	3	2
2	1	1	1	1	1	1	2	3	2
2	1	1	2	1	4	2	1	2	1

Approximately 50% are number ‘1’s

[GenRV_Discrete_finite_support.m]

Example



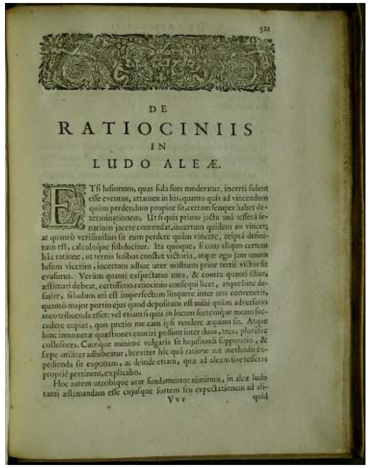


As $n \to \infty$, the average will converge to $\mathbb{E}X = \frac{15}{8} = 1.875$

[GenRV_Discrete_finite_support_average.m]

Christiaan Huygens (1629-1695)

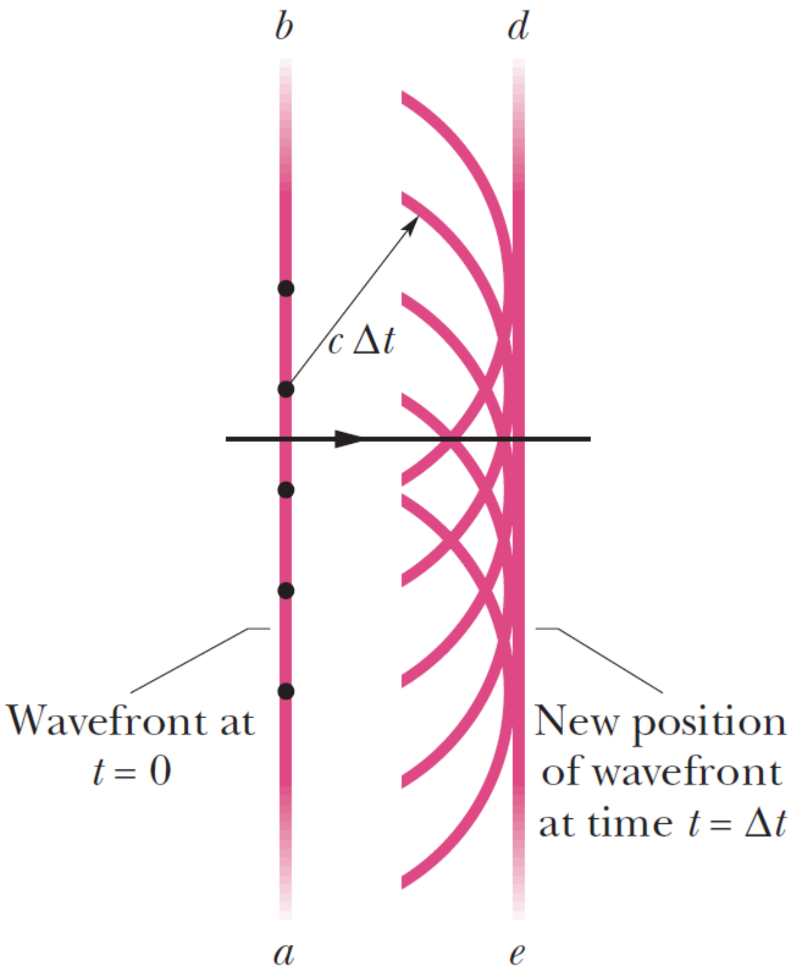
- Dutch astronomer
- In 1657, wrote the first treatise (textbook) on probability theory: "On Reasoning in Games of Chance"
  - Van Rekeningh in Spelen van Geluck
  - De ratiociniis in ludo aleae
  - http://www.york.ac.uk/depts/maths/histstat/huygens.htm
- Interest sparked partly by the work of Pascal and Fermat.
- Originally introduced the concept of **expected value**.


DE
RATIOCINIIS
IN
LUDO ALEÆ.

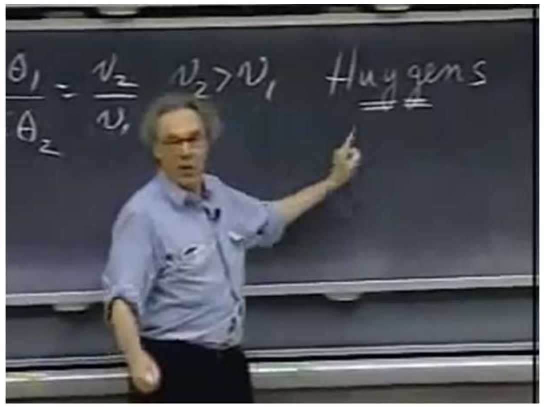
http://en.wikipedia.org/wiki/Christiaan_Huygens#mediaviewer/File:Christiaan_Huygens.jpg
http://bc.ub.leidenuniv.nl/bc/tentoonstelling/Huygens/Images/html/03_2.html

Christiaan Huygens (1629-1695)

- Also famous for the "**Huygens' Principle**"



All points on a wavefront serve as point sources of spherical secondary wavelets. After a time t, the new position of the wavefront will be that of a surface tangent to these secondary wavelets.



Calculations of Expected Values

WolframAlpha computational.. knowledge engine

sum exp(-alpha) k * alpha^k / k! from k =0 to infinity

Examples Random

Infinite sum:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k \exp(-\alpha)\, \alpha^k}{k!} = \alpha \qquad \mathbb{E}X = \alpha$$

$n!$ is the factorial function »

Poisson(α)

sum k * n!/(k!*(n-k)!) * p^k * (1-p)^(n-k) from k =0 to n

Examples Random

Sum:

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{k\, n!\, p^k (1-p)^{n-k}}{k!\,(n-k)!} = n\, p \qquad \mathbb{E}X = np$$

$n!$ is the factorial function »

Binomial(n,p)

[http://www.glo.or.th] หวย (Huay)

Government Lottery (สลากกินแบ่งรัฐบาล)

https://www.pptvhd36.com/news/ประเด็นร้อน/62583

- ตั้งแต่งวดวันที่ 1 ก.ย. 2560 เป็นต้นไป สำนักงานสลากกินแบ่งรัฐบาล ปรับปรุงรูปแบบสลากฯใหม่ จากเดิมฉบับคู่ 80 บาท (ฉบับละ 40 บาท) เป็นรูปแบบใบเดียวฉบับละ 80 บาท
- เงินรางวัลยังเท่าเดิม เปลี่ยนแค่ขนาดที่กระชับเล็กลงเท่านั้น

Government Lottery (สลากกินแบ่งรัฐบาล)

สำนักงานสลากกินแบ่งรัฐบาล ช่วยราษฎร์ เสริมรัฐ ยืนหยัดคุณธรรม

ผลการออกรางวัลสลากกินแบ่งรัฐบาล

งวดประจำวันที่ 16 ตุลาคม 2562

ตรวจผลรางวัลทันใจ หรือตรวจผลรางวัลย้อนหลังได้ที่ โทร. 0 2528 8899 และ 1900 1900 10

ตรวจผลทาง Internet ได้ที่เว็บไซต์ www.glo.or.th และ Application "GLO Lottery" ในระบบ Android และระบบ iOS

รางวัลที่ 1				เลขหน้า 3 ตัว		เลขท้าย 3 ตัว		เลขท้าย 2 ตัว	
รางวัลละ 6,000,000 บาท				รางวัลละ 4,000 บาท		รางวัลละ 4,000 บาท		รางวัลละ 2,000 บาท	
812564				255	625	132	598	15	
รางวัลข้างเคียงรางวัลที่ 1		รางวัลละ 100,000 บาท			รางวัลที่ 2		รางวัลละ 200,000 บาท		
8 1 2 5 6 3			8 1 2 5 6 5		010810	389324	422672	685097	872569
รางวัลที่ 3		รางวัลละ 80,000 บาท							
184912	310103	400722	482422	498877	509278	588913	634449	792849	867144
รางวัลที่ 4		รางวัลละ 40,000 บาท							
003022	155360	237547	266363	373702	436220	533579	782132	857672	955921
013024	155681	240435	312560	391754	465005	550552	803175	858949	960192
045286	160664	243236	326116	412815	483577	551285	804013	882975	967983
051309	206603	245630	335992	414324	489817	589789	805436	895330	981985
053345	230220	258018	370468	428083	531099	618124	848362	931816	987179
รางวัลที่ 5		รางวัลละ 20,000 บาท							
003702	081403	195339	298102	344977	455923	543969	633171	760125	881018
006716	085651	206838	303098	365823	466330	547116	637184	772419	888691
025878	085750	259875	306124	371914	475702	549687	668149	778791	890996
028206	117010	260202	308411	382825	480010	558215	673646	798582	899923
030327	133222	260457	308807	398450	484545	566744	682848	831822	904347
033043	139259	265407	311589	409550	486629	568800	687586	836234	917535
039982	151520	266783	322444	431080	513624	575341	708439	844954	931010
045891	160304	268578	326315	434722	527190	578409	716818	849736	958682
050755	163569	279811	333931	454193	533798	585679	717015	855824	969824
051952	174513	282553	344616	455269	538038	586306	755445	873219	989669

นายพิภพ ปานแย้ม รองนายกเทศมนตรีเทศบาลเมืองคลองหลวง นำล็อตเตอรี่จำนวนมากติดฝาผนังบ้านของตนที่ อ.คลองหลวง จ.ปทุมธานี

“คอหวย” ปลง นำหวยมาทำ “วอลเปเปอร์บ้าน”

[http://money.sanook.com/204469/]
[http://www.nationtv.tv/main/content/lifestyle/378418937/]

Government Lottery (สลากกินแบ่งรัฐบาล)

เงื่อนไขเงินรางวัลสลากกินแบ่งรัฐบาล

(ใช้ตั้งแต่งวดวันที่ 1 กันยายน 2560 เป็นต้นไป)
สลาก 1 ชุด มี 1 ล้านฉบับ ฉบับละ 80 บาท
ถ้าจำหน่ายหมด กำหนดเงินรางวัลต่อชุด ดังนี้

รางวัล	จำนวน	มูลค่า (บาท)
รางวัลที่ หนึ่ง	1 รางวัล	6,000,000
รางวัลที่ สอง	5 รางวัล	200,000
รางวัลที่ สาม	10 รางวัล	80,000
รางวัลที่ สี่	50 รางวัล	40,000
รางวัลที่ ห้า	100 รางวัล	20,000
รางวัลข้างเคียงรางวัลที่หนึ่ง	2 รางวัล	100,000
รางวัลเลขหน้า 3 ตัว เสี่ยง 2 ครั้ง	2,000 รางวัล	4,000
รางวัลเลขท้าย 3 ตัว เสี่ยง 2 ครั้ง	2,000 รางวัล	4,000
รางวัลเลขท้าย 2 ตัว เสี่ยง 1 ครั้ง	10,000 รางวัล	2,000

สลาก 1 ชุด มี 14,168 รางวัล เป็นเงิน 48,000,000 บาท

Expected Profit = –32

ก. เงินรางวัลจะจ่ายแก่ผู้ถือสลากฉบับที่ถูกรางวัลนำมาขอรับ
ข. ถ้าสลากจำหน่ายไม่หมด เงินรางวัลหนึ่งๆ ต้องลดลงตามส่วน
ค. ผู้ถูกรางวัลต้องมาขอรับเงินรางวัลภายใน 2 ปี นับจากวันออกรางวัลสลาก หากพ้นกำหนดจะนำส่งเป็นรายได้แผ่นดิน
ง. ผู้ขอรับเงินรางวัลต้องชำระค่าอากรแสตมป์ ในอัตรา 1 บาท ของเงินรางวัล ทุก 200 บาท หรือเศษของ 200 บาท

Can only press once

"Similar" Example

ฉันเหมือนคนที่มีเสื้อใส่ แต่ยังไม่พอใจกับที่ฉันมี
เพราะแค่เพียงได้เจอเสื้อใหม่ อย่างที่ฉันพอใจอยากจะรีบคว้า
ใครก็เตือนว่าไม่คุ้มกับสิ่งที่ฉันทิ้งไป เพื่อสิ่งที่ฉันยังไม่ได้มา
ใครก็เตือนอย่ารีบร้อนจะ*เสี่ยง*ทำไมนะ แต่มันก็ยังถลำไปหมดทั้งใจ

ฉันอุตส่าห์ไม่รักเขาเพื่อที่จะรักเธอ
ยอมทุ่มเทหมดแล้วให้เธอ แล้วเธอก็ทิ้งไป
เสียเค้าแล้วยังต้องเสียใจเธอสอนฉันให้เข้าใจ
การลงทุนเสี่ยงเหลือเกิน

[Stock Exchange of Thailand]

From the SET's website,...

ตลาดหลักทรัพย์แห่งประเทศไทย

“การไม่ลงทุน
มีความเสี่ยงมากกว่า”

[www.set.or.th]

Computation of $\mathbb{E}[X^2]$

WolframAlpha computational knowledge engine

sum exp(-alpha) k^2 * alpha^k / k! from k =0 to infinity

Examples Random

Poisson(α)

Infinite sum:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^2 \exp(-\alpha)\, \alpha^k}{k!} = \alpha\,(\alpha+1)$$

$$\mathbb{E}\left[X^2\right] = \alpha + \alpha^2$$

$n!$ is the factorial function »

sum k^2 * n!/(k!*(n-k)!) * p^k * (1-p)^(n-k) from k =0 to n

Examples Random

Binomial(n,p)

Sum:

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{k^2\, n!\, p^k\, (1-p)^{n-k}}{k!\,(n-k)!} = p\,(n^2\, p - n\, p + n)$$

$$\mathbb{E}\left[X^2\right] = np(1-p) + (np)^2$$

$n!$ is the factorial function »

"Average" deviation from the mean

- Deviation (distance) from the mean: $X - \mathbb{E}X$
- "Average" deviation from the mean
  - Choice #1: $\mathbb{E}[X - \mathbb{E}X] = \mathbb{E}X - \mathbb{E}[\underbrace{\mathbb{E}X}_{\text{constant}}] = \mathbb{E}X - \mathbb{E}X = 0$
  - Choice #2: $\mathbb{E}[|X - \mathbb{E}X|]$ ⬅ difficult to calculate or analyze
  - Choice #3: $\sigma_X = \sqrt{\operatorname{Var} X} = \sqrt{\mathbb{E}[(X - \mathbb{E}X)^2]}$

root mean square of the deviation (distance) from the mean

Computation of Var X and σ_X

Binomial(n,p)

sum k * n!/(k!*(n-k)!) * p^k * (1-p)^(n-k) from k =0 to n

≡ Examples   Random

Sum:

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{k\, n!\, p^k\, (1-p)^{n-k}}{k!\,(n-k)!} = n\, p$$

$$\mathbb{E}X = np$$

$$\operatorname{Var} X = \mathbb{E}\left[X^2\right] - \left(\mathbb{E}X\right)^2 = np\left(1-p\right)$$

sum k^2 * n!/(k!*(n-k)!) * p^k * (1-p)^(n-k) from k =0 to n

≡ Examples   Random

Sum:

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{k^2\, n!\, p^k\, (1-p)^{n-k}}{k!\,(n-k)!} = p\left(n^2\, p - n\, p + n\right)$$

$$\mathbb{E}\left[X^2\right] = np\left(1-p\right) + \left(np\right)^2$$

$n!$ is the factorial function »

Expectation and Variance

- The **expectation** (or **mean** or **expected value**) of a discrete random variable X is given by

$$\mathbb{E}X = \sum_x x p_X(x)$$

- The expected value of a function g of a RV X is given by

$$\mathbb{E}[g(X)] = \sum_x g(x) p_X(x)$$

- The **variance** of a RV X is given by

$$\mathrm{Var}[X] = \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}X)^2\right] = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}X)^2$$

- The **standard deviation** of a RV X is given by

$$\sigma_X = \sqrt{\mathrm{Var}[X]}$$

Properties Expectation and Variance

$$\mathbb{E}\left[g\left(X\right)\right] \neq g\left(\mathbb{E}\left[X\right]\right)$$

$$\mathbb{E}\left[aX + b\right] = a\left(\mathbb{E}X\right) + b$$

$$\mathbb{E}\left[c_1 g_1(X) + c_2 g_2(X)\right] = c_1 \mathbb{E}\left[g_1(X)\right] + c_2 \mathbb{E}\left[g_2(X)\right]$$

$$\mathrm{Var}[aX + b] = a^2 \mathrm{Var}\left[X\right]$$

$$\sigma_{aX+b} = |a| \sigma_X$$

$$\mathrm{Var}\left[c_1 g_1(X) + c_2 g_2(X)\right] = c_1^2 \mathrm{Var}\left[g_1(X)\right] + c_2^2 \mathrm{Var}\left[g_2(X)\right] + \underbrace{c_1 c_2 \,\mathrm{Cov}\left[g_1(X), g_2(X)\right]}_{\text{To be discussed in Chapter 11}}$$